# 1 лекция

**Неопределенные интегралы**

Функция F(x) называется первообразной для f(x), если F’(x) = f(x)

**Пример:**

а)

б)

в)

=

**Теорема.** Пусть F1 и F2 – первообразные непрерывной функции f(x) на интервале (a, b).

Тогда

**Доказательство.**

Пусть

(Давно прошли времена хип-хопа и гранжа. Но что же вечно? Теорема Лагранжа!)

Множество, в котором происходит интегрирование, должно быть линейно замкнутым!

**Пример**

Неопределенным интегралом от функции f(x) на промежутке (a, b) называется множество всех её первообразных.

**Пример**

а)

б)

**Таблица неопределенных интегралов**

Не каждый интеграл можно выразить через элементарные функции.

Пример

Попробуем выразить (С помощью формулы Маклорена)

**Свойства неопределенного интеграла**

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
2. Интеграл суммы функций равен сумме интегралов:
3. Интеграл разности функций равен разности интегралов:
4. Постоянный коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла:

**Пример:**

**Теорема** (Замена переменной в неопределенном интеграле)

Пусть F(x) – первообразная для f(x); функция g(t) – дифференцируема. Тогда

Доказательство

**Пример**

**Свойство дифференциала**

**Пример**

# 2 лекция

**Интегрирование по частям**

**Теорема.**

**Доказательство**

**Пример**

4.

5.

Теперь делаем небольшой ПрЕкОл:

6.

**Интегрирование классов функций**

кек

**Интегрирование рациональных функций**

**Определение.** Рациональные функции — это функции вида

Если m ≥ n, то f(x) неправильная

m < n, то f(x) – правильная

**Пример.**

*\_*

\_

(Если кто не понял, это типо деление столбиком)

Многочлены с вещественными коэффициентами

**Теорема.** Пусть

**Доказательство**

Вспомним операцию комплексного сопряжения

Свойства.

**Основная теорема алгебры.** Если

Рассмотрим

Если

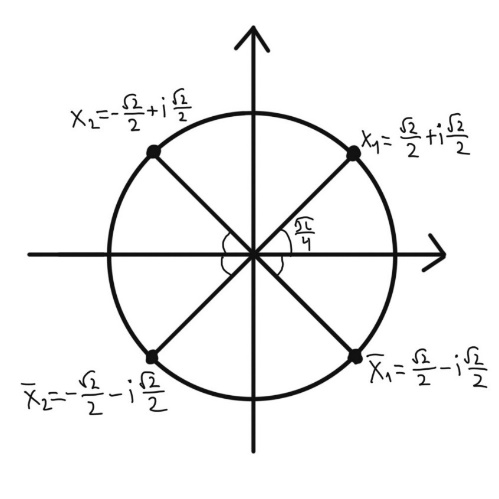
**Лемма.** Если

**Доказательство**

**Пример**

Разложим на комплексные корни

(x-(x-(x-(x-



**Пример**

# Лекция 3

**Теорема.** Пусть . Правильная рациональная дробь

-разложение знаменателя на неприводимые многочлены. Тогда существует единственное разложение

(Я хз правильно ли я расставил коэффициенты, проверьте меня)

Доказательство. Индукция по степени m знаменателя

2)

Шаг индукции

1 случай:

2 случай:

Покажем, что

Делится на

Коэффициенты пропорциональности

(Если честно, я ничего не понял из этого доказательства. Памагити)

**Интегрирование простейших дробей**

А)

Б)

Дальше решать влом…

Разложение правильной дроби в сумму простейших

Пр.1

Итого

Пр.2

Итого

# Лекция 4

**Интегралы вида**

Классно порешали ИнТеГрАлЬчЕкИ. Теперь вспомним еще формулы и порешаем еще немного интегральчеков(больше интегралов богу интегралов)

**Универсальная тригонометрическая подстановка**

Какая у нас там тема? А, точно

**Пример:**

А теперь решим через универсальную тригонометрическую подстановку.

Разные ответы? Ну разные и разные, че бубнить-то? Это ж тригонометрия

Здесь различие в ответах можно объяснить тем, что sh x и ch x отличаются друг от друга на единицу. Т. е.

Вот видите, как все хорошо получается без модуля!

**Интегрирование иррациональностей**

\*Да, даже такие иррациональности как ты интегрируемы.

**Пример**

Посчитаем

# Лекция 5

**Взятие интеграла типа**

Пример

Дальше решается по старой схеме.

**Взятие интеграла типа**

Также можно решать и подстановкой Эйлера

**Подстановка Эйлера**

**Пример**

Где

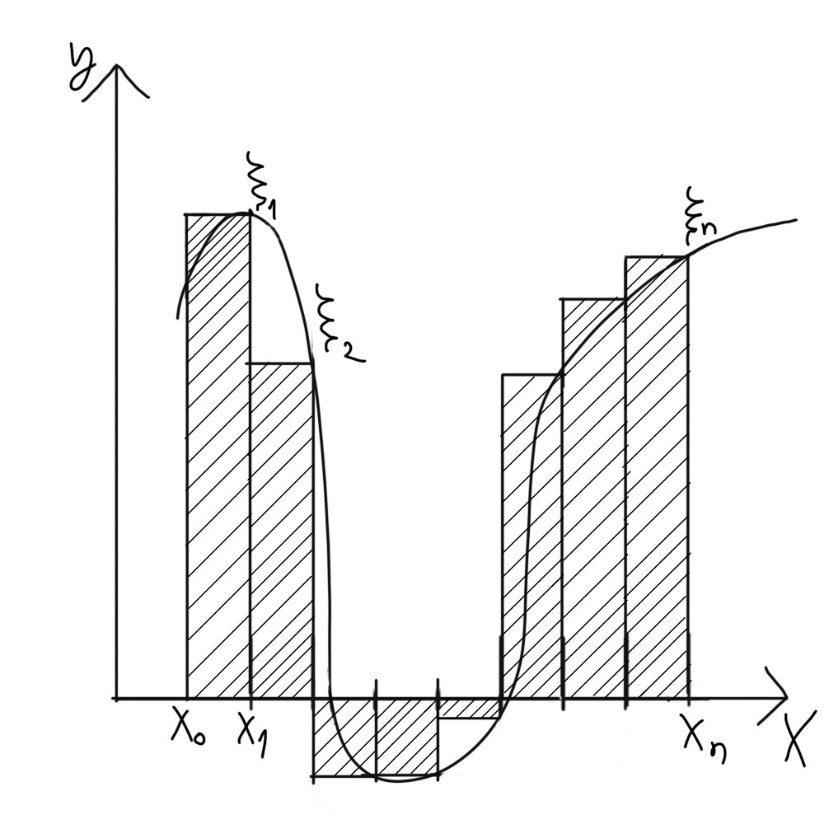
Где

Решим по-другому.

Где

**Определенный интеграл (Римана)**

Пусть функция непрерывна на замкнутом интервале . Разобьем данный отрезок на n частичных интервалов. В каждом интервале выберем произвольную точку и составим интегральную сумму . Определенный интеграл от функции вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю



(Сумма площадей заштрихованных прямоугольников и есть значение определенного интеграла)

**Физический смысл определенного интеграла**

Путь S, пройденный телом при прямолинейном движении со скоростью v(t) за интервал времени от вычисляется по формуле:

**Геометрический смысл интеграла**

Площадь S криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной на интервале функции ) вычисляется по формуле:

**Формула Ньютона-Лейбница**

Пусть функция непрерывна на замкнутом интервале . Если – первообразная функции на , то

# Лекция 6

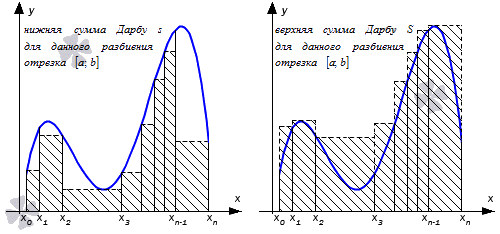
**Суммы Дарбу**

Пусть ограничена на и . Это значит, что f — ограничена на любом . Следовательно, по теореме Вейерштрасса (Если   , то она достигает своих точных граней),

Итак, пусть мы выбрали какое-то конкретное разбиение отрезка на n частей. Теперь выберем на каждой из этих частей промежуточные точки , так, чтобы сумма площадей получившихся прямоугольников была минимальной (мы тут вычисляем площадь криволинейной трапеции).

Построим интегральную сумму следующим способом: на каждом интервале разбиения R точку будем выбирать так, чтобы получался прямоугольник минимальной площади, т.е. чтобы высота была наименьшей. Наименьшую высоту нам как раз и даст операция . Интегральная сумма, построенная на таких прямоугольниках, очевидно, есть самая маленькая из всевозможных сумм, получаемых на данном разбиении. Эта сумма называется **нижней суммой Дарбу**.

Точно так же можно построить и наибольшую для данного разбиения сумму: на каждом из интервалов   разбиения R мы выбираем точку   так, чтобы значение   было максимальным: . Этим значениям соответствует интегральная, называемая **верхней суммой Дарбу*.***



В этот раз мне влом было рисовать, поэтому спиздил фотку из интернета.

Теперь дадим более строгое определение.

**Определение.** Нижней(верхней) суммой Дарбу разбиения R называется

**Определение.** Пишем если все точки являются точками

**Утверждение.** Если

Ошибка 404, доказательство не найдено (сейчас влом разбираться в нем, если хотите, можете сами оформить. Или, мб, я сам потом это сделаю)

**Утверждение.**

**Доказательство.** Рассмотрим (на самом деле тут тоже ничего не понял, но тут в одну строку доказательство)

**Определение.** Нижним(верхним) интегралом Дарбу для на называется

**Утверждение**.

**Теорема.** Функция интегрируема (по Риману) на

**Замечание.**

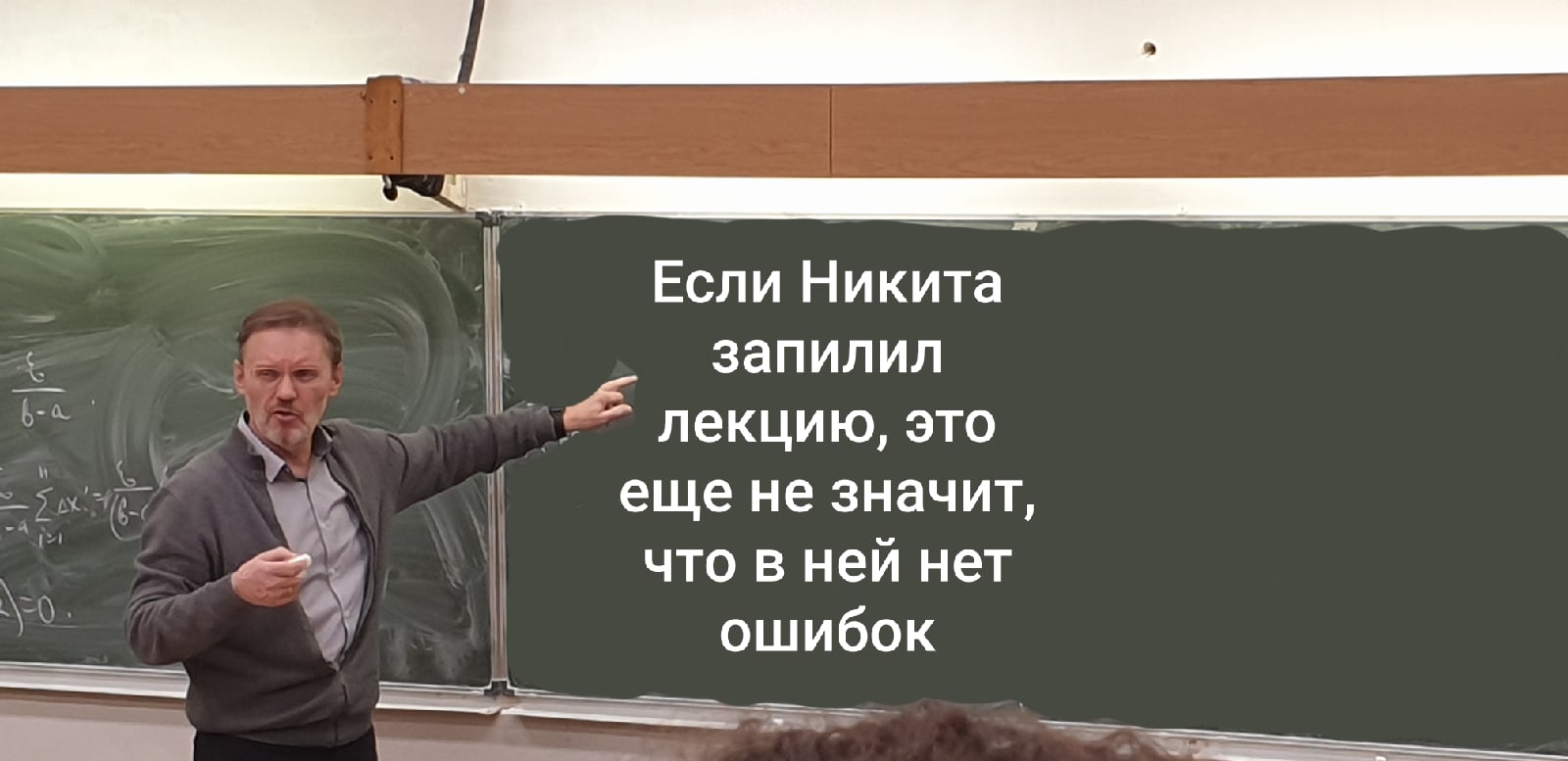
**Доказательство.** А)

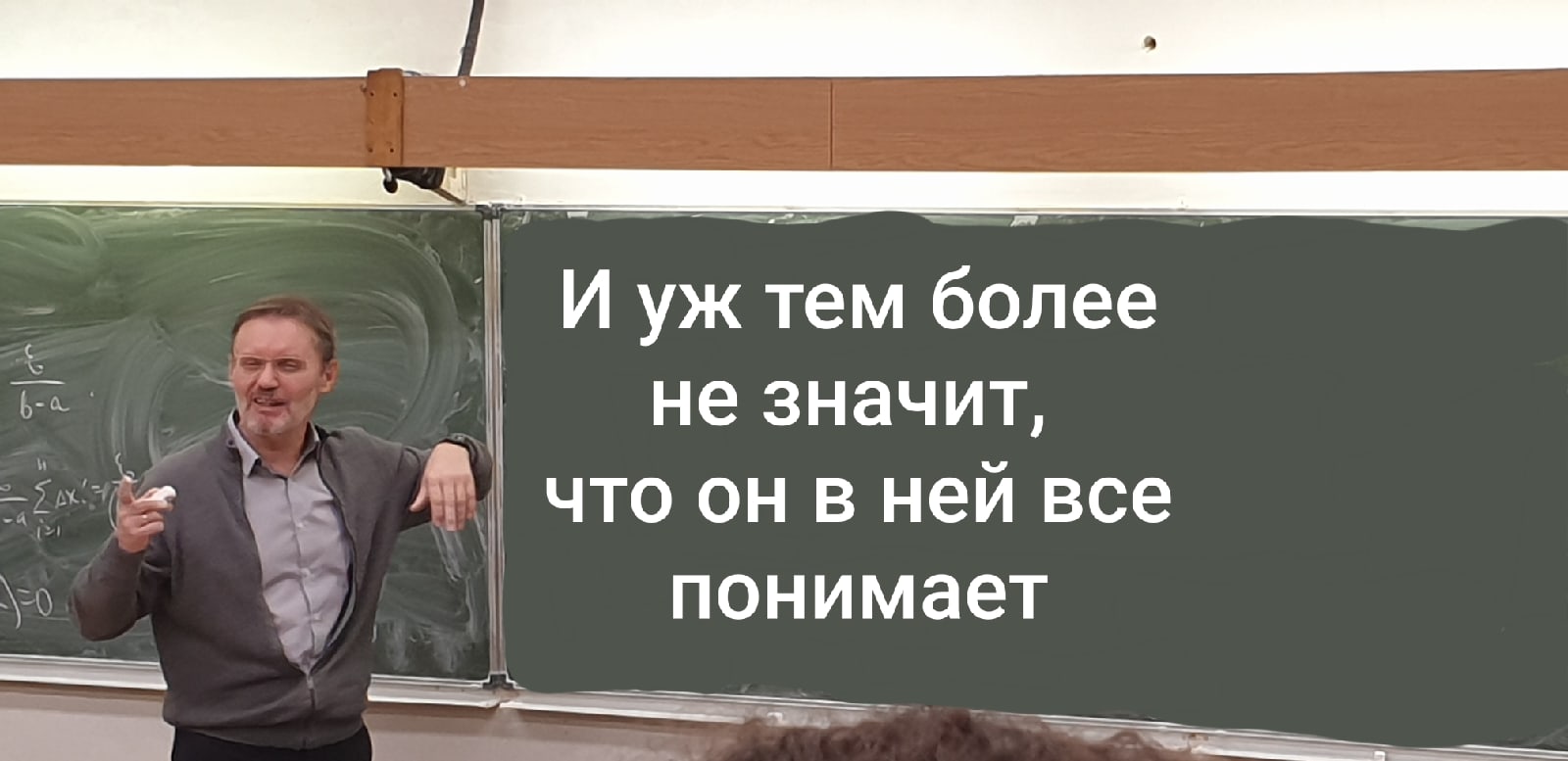
Б).Пусть

**Теорема 1.** Если непрерывна на , то она интегрируема на

**Доказательство.** Т.к. непрерывна на

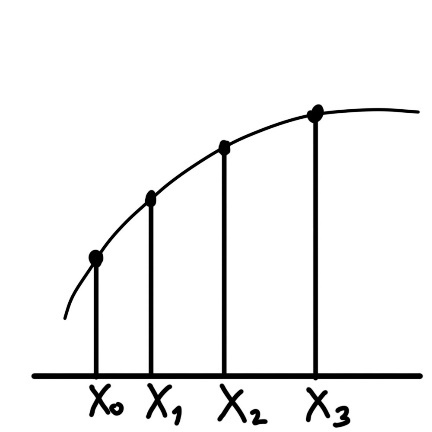
Рассмотрим разбиение тогда



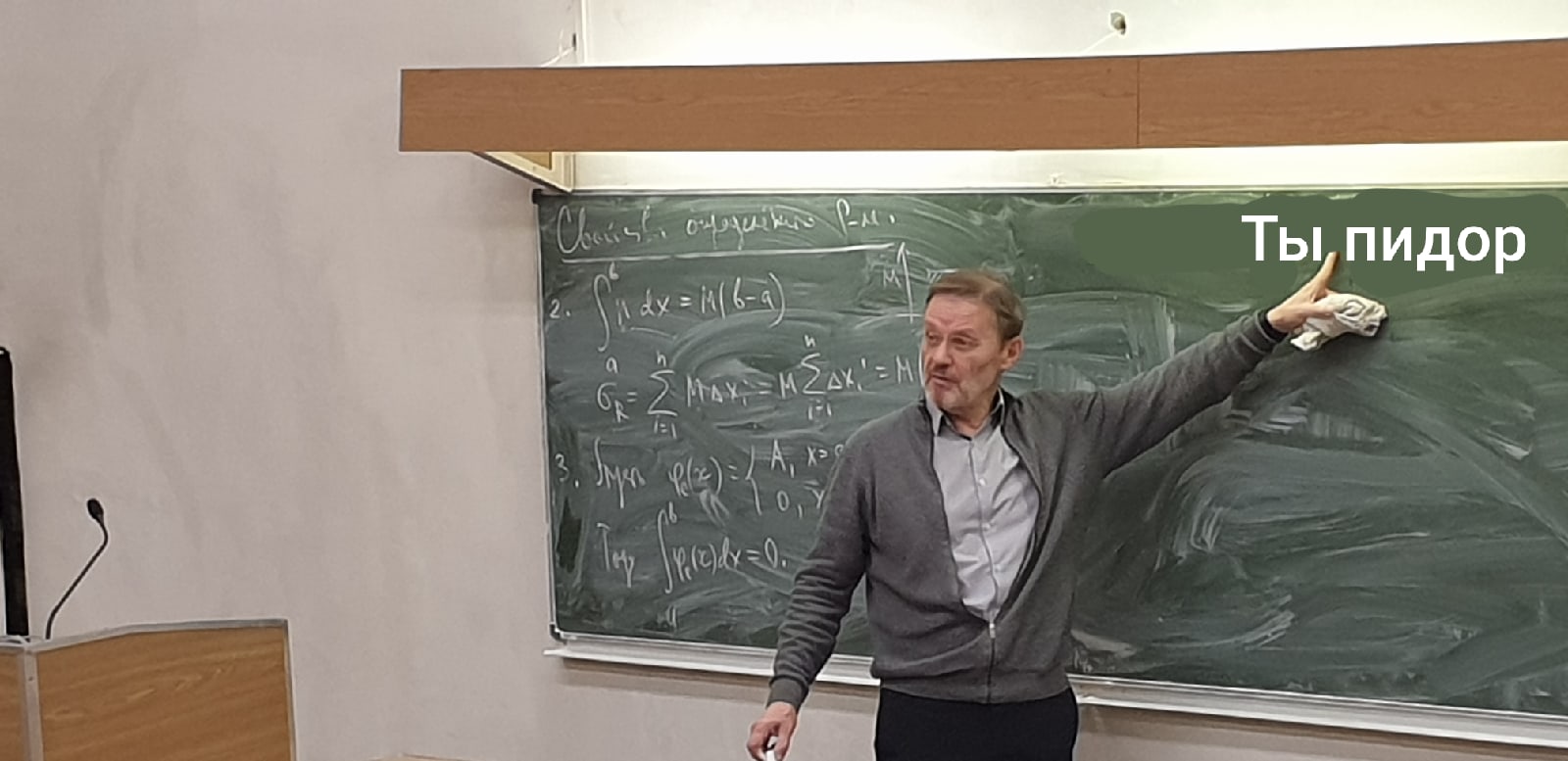


**Теорема 2.** Если монотонно невозрастает (неубывает) на , то она интегрируема.

**Доказательство.** Для рассмотрим разбиение R отрезка с



**Задача.** Придумать монотонно неубывающую функцию на с бесконечным числом точек разрыва.



**Свойства определенного интеграла**

1. Для функции y = f(x), определенной при x = a, справедливо равенство формула

Доказательство очевидно.

1. Для интегрируемой на отрезке функции выполняется

Доказательство очевидно.

1. Для интегрируемых на отрезке функций и

Доказательство. Запишем интегральную сумму функции для данного разбиения отрезка и данного выбора точек

Где и - интегральные суммы функций и для данного разбиения точек соответственно.

Переходя к пределу при получим , что по определению интеграла Римана равносильно утверждению доказываемого свойства.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла. То есть, для интегрируемой на отрезке функции и произвольного числа k справедливо равенство:

Доказательство. Аналогично предыдущему

1. Пусть функция интегрируема на интервале X, причем и , тогда

Доказательство очевидно.

1. Если функция интегрируема на отрезке [a; b], то она интегрируема и на любом внутреннем отрезке.

Доказательство основано на свойстве сумм Дарбу: если к имеющемуся разбиению отрезка добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу не уменьшится, а верхняя – не увеличиться.

1. Если функция y = f(x) интегрируема на отрезке [a; b] и () для любого значения аргумента , то

Это свойство доказывается через определение интеграла Римана: любая интегральная сумма для любого выбора точек разбиения отрезка и точек при будет неотрицательной (не положительной).

**Следствие.**

Для интегрируемых на отрезке *[a; b]* функций *y = f(x)* и *y = g(x)* справедливы неравенства:

Это утверждение означает, что допустимо интегрирование неравенств. Этим следствием мы будем пользоваться при доказательстве следующих свойств.

1. Пусть функция интегрируема на отрезке тогда справедливо неравенство

Доказательство

Очевидно, что. В предыдущем свойстве мы выяснили, что неравенство можно почленно интегрировать, поэтому, справедливо.

Это двойное неравенство можно записать как

1. Пусть функции *y = f(x)* и *y = g(x)* интегрируемы на отрезке *[a; b]* и  для любого значения аргумента , тогда,

Где   и .

Доказательство проводится аналогично. Так как *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значение функции *y = f(x)* на отрезке *[a; b]*, то . Домножение двойного неравенства на неотрицательную функцию *y = g(x)* приводит нас к следующему двойному неравенству . Интегрируя его на отрезке *[a; b]*, придем к доказываемому утверждению.

Следствие: если взять *g(x) = 1*, то неравенство примет вид.

1. **Первая формула среднего значения.**

Пусть функция *y = f(x)* интегрируема на отрезке *[a;b]*,   и , тогда существует такое число  , что

**Следствие.**

Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке *[a; b]*, то найдется такое число , что

1. **Вторая формула среднего значения.**

Если на отрезке *[a; b]* функция *y = f(x)* интегрируема, а *y = g(x)* монотонна, то существует такое число  , что справедливо равенство

**Интеграл с переменным верхним пределом**

Пусть интегрируема на

**Определение.**

**Теорема 1.**  непрерывна на

**Доказательство.**

(Есть еще одна важная теоремка, она доказана в следующей лекции)

# Лекция 7

**Теорема 2(Барроу).** Пусть интегрируема на ,

**Доказательство.**

В силу непрерывности

Пусть

**Следствие.** Если непрерывна на – первообразная для и

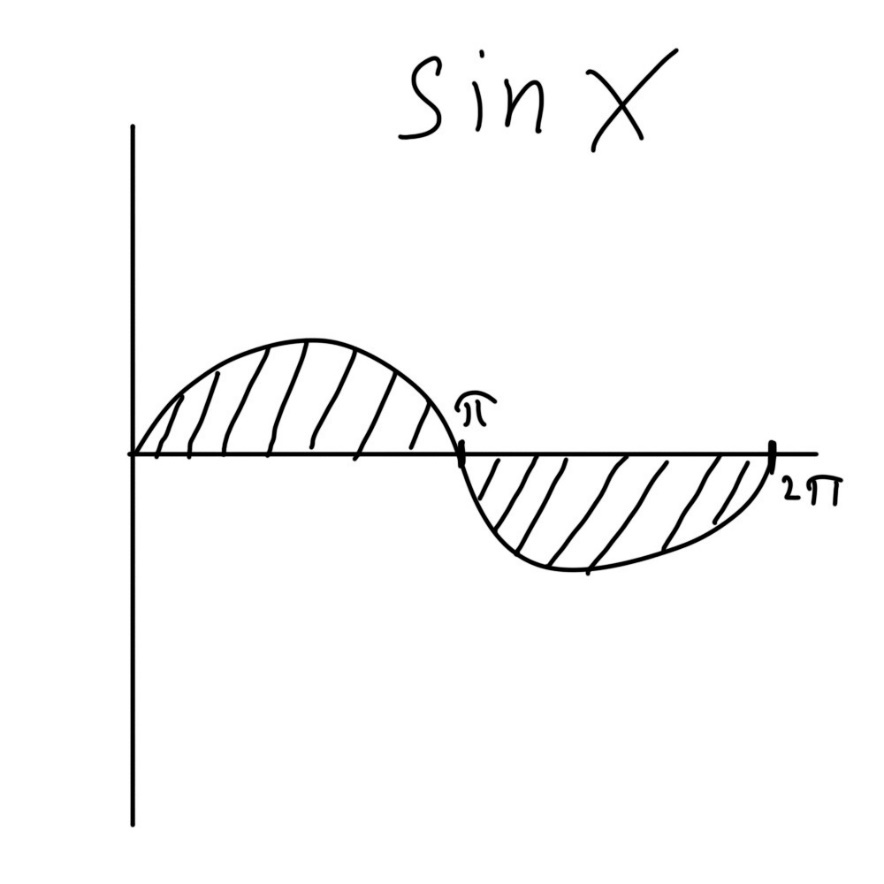
**Следствие (Формула Ньютона-Лейбница).**

Пусть первообразная для непрерывной функции на , тогда

**Доказательство**

**Примеры**

Почему так получилось? Ну, вся площадь под осью ОХ “уменьшает” площадь, а площадь над осью ОХ “увеличивает” площадь. А так как площадь над и под осью ОХ равна, то интеграл равен 0.



Посчитаем площадь нормально

**Утверждение**

А) Если - четная, то

Б) Если -нечетная, то

**Теорема.** Если дифференцируема на и непрерывна на (непрерывно дифференцируема на ), причем непрерывна на

**Доказательство.** Пусть - первообразная для , тогда

**Примеры.**

**Теорема. Интегрирование по частям в определенных интегралах.**

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Несобственные интегралы.**

**Определение.** Определенный интеграл  называется **несобственным интегралом**, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

* Предел a или b (или оба предела) являются бесконечными;
* Функция f(x) имеет одну или несколько точек разрыва внутри интервала

**Бесконечные пределы интегрирования**

Пусть  является непрерывной функцией в интервале .

Несобственный интеграл определяется через предел следующим образом:

Рассмотрим также случай, когда функция  непрерывна в интервале . В этом случае несобственный интеграл определяется как

Если указанные выше пределы существуют и конечны, то говорят, что несобственные интегралы *сходятся*. В противном случае интегралы *расходятся*.  
  
Пусть  является непрерывной функцией на множестве действительных чисел. Тогда справедливо соотношение

Если для некоторого действительного числа c оба интеграла в правой части сходятся, то говорят, что интеграл также сходится; в противном случае он расходится.

**Теоремы сравнения**

Пусть  и  является непрерывными функциями в интервале  Предположим, что  для всех  в интервале . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если сходится, то  также сходится;
2. Если  расходится, то  также расходится;
3. Если  сходится, то  также сходится. В этом случае говорят, что интеграл  является **абсолютно сходящимся**.

**Доказательство** 1 и 2.

**Интеграл от разрывной функции**

Пусть функция  непрерывна в интервале , но имеет разрыв в точке . В этом случае *несобственный интеграл* определяется в виде

Аналогично можно рассмотреть случай, когда функция непрерывна в интервале , но имеет разрыв при . Тогда

Если приведенные выше пределы существуют и конечны, то говорят, что соответствующие несобственные интегралы *сходятся*. В противном случае они считаются *расходящимися*.

Пусть  непрерывна для всех действительных  в интервале , за исключением некоторой точки . Тогда справедливо соотношение

и говорят, что несобственный интеграл сходится, если оба интеграла в правой части верхнего равенства сходятся. В противном случае несобственный интеграл расходится.

# Лекция 7

**Примеры сходящихся/расходящихся несобственных интегралов**

(Я хз че происходит в b у Прохорова и как он это объяснил. Кто-нибудь, памагити)

c) (Пример сходящегося несобственного интеграла, который не сходится абсолютно)

Почему так? Ну, в рисуночке потом поясню (рисуночек скоро появится).

**Приложения определенных интегралов**

**Декартова прямоугольная система координат**

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, являющейся графиком функции у = f(x), где f(x) - положительная и непрерывная

на отрезке [а, b] функция, определяется по формуле

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной и снизу, и сверху графиками положительных и непрерывных функций, уравнения которых и

соответственно, определяется по формуле

Если функция f(x) < 0 на [а, b], то -f(x) > 0 на этом отрезке, следовательно площадь соответствующей криволинейной трапеции определяется по формуле

Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически

где функции f(t) и g(t) имеют непрерывные производные, справедлива следующая формула

**Полярная система координат**

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной уравнением

и двумя радиус-векторами и определяется по формуле

**Длина дуги плоскости**

Длина плоской кривой, заданной в прямоугольной системе координат уравнением у = f(x), где и функция f(x) имеет непрерывную производную на данном отрезке, определяется по формуле

Длина плоской кривой, заданной параметрически уравнениями

где функции f(t) и g(t) имеют непрерывные производные, определяется по

формуле

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах где функция имеет непрерывную производную, определяется по формуле

**Вычисление объема тела**

**Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений**

Объем V тела, в случае, когда известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси OX: S = S(x), определяется по формуле

**Объем тела вращения**

Объем V тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции , относительно оси ОХ определяется по формуле

Объем У тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции , относительно оси OY определяется по формуле

Объем V тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции , относительно оси OY определяется по формуле

Объем V тела, полученного вращением криволинейной трапеций, ограниченной графиком непрерывной функции относительно полярной оси, определяется по формуле

**Вычисление площади поверхности вращения**

Площадь S поверхности, полученной вращением кривой, являющейся графиком неотрицательной и непрерывно дифференцируемой функции у = f(x) на [a, b], относительно оси ОХ определяется по формуле

Если кривая задана параметрическими уравнениями

где функции f(t) и g(t) имеют непрерывные производные, то формула для

площади поверхности вращения принимает вид

Если кривая задана в полярных координатах уравнением , где -непрерывно дифференцируемая функция на , то формула для площади поверхности вращения принимает вид

# Лекция 8

**Мера Жордана**

**Сеть в . Кубы и элементарные множества**

(По конспектам Прохорова это должна быть 11 лекция. ВТФ?)

(Еще и непонятно ничего)

**Определение.** Множество вида

– называется n-мерным брусом в пространстве

Если для всех , то брус называется n-мерным кубом.

**Пример.** Пусть n = 2, т. е. мы имеем двумерное пространство (или двумерное пространство имеет нас). Тогда мы имеем

Т. е. мы имеем прямоугольник, со сторонами, параллельными осям прямоугольной системы координат. Причем его длина больше

Заметим, что его площадь больше прямоугольника а, но меньше прямоугольника b ().

А как назвать “площадь” n-мерного бруса? Это и есть Мера Жордана!

**Определение.**

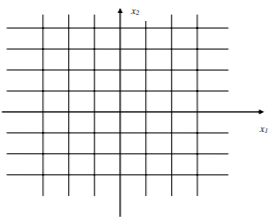
Меру Жордана n-мерного бруса равна

**Определение.** Пусть k – натуральное число; разобьем каждую координатную ось на отрезки точками

Таким образом, все пространство “разобьется” на кубы вида

В этом случае будем говорить, что в пространстве построена сеть порядка k, а кубы Q, входящие в эту сеть, будем называть кубами порядка k.

**Пример.** Отметим, что в одномерном случае (при n=1) кубы Q являются отрезками, а в двумерном(n=2)- квадратами, в трехмерном(n=3)- обычными трехмерными кубами.



(При n=2)

**Свойства.**

1. Различные кубы одного порядка не имеют общих внутренних точек. В пересечение двух кубов одного порядка могут входить только их граничные точки.

2. Куб порядка k состоит из кубов порядка k + 1.

3. Если G – ограниченное множество в , то для любого натурального k существует конечное число кубов порядка k, объединение которых содержит G.

**Определение.** Любой конечный набор попарно различных кубов одного порядка называется элементарным множеством.

**Замечание.** В силу свойства 2 сети понятие элементарного множества не зависит от порядка k. Кроме того, объединение и пересечение конечного числа элементарных множеств есть элементарное множество.

**Мера элементарных множеств.**

По аналогии с формулой для длины (n = 1), площади (n = 2) и объема (n = 3) определим меру n-мерного куба.

**Определение.** Пусть Q-куб порядка k. Тогда число

**Определение.** Пусть S – элементарное множество, т. е.

где попарно различные кубы порядка k. Меру µS элементарного множества S определим по формуле

Меру пустого множества будем считать равной нулю, т.е.

**Свойства.**

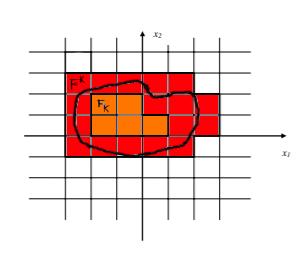
1. Неотрицательность меры: µS ≥ 0 для любого элементарного множества S. Причем µS = 0 тогда и только тогда, когда S = ∅.

2. Полуаддитивность меры: µ (P ∪S) ≤ µP +µS для любых элементарных множеств P и S. Причем, если P и S не имеют общих кубов, то µ(P ∪ S) = µP + µS

3. Монотонность меры: если P ⊂ S, то µP ≤ µQ.

**Мера Жордана произвольного ограниченного множества**

Пусть F – ограниченное множество в пространстве . Выберем натуральное k. Обозначим через множество всех тех кубов порядка k, которые целиком содержатся в F, а через – множество всех тех кубов порядка k, имеющих непустое пересечение с F.



Справедливость следующих включений очевидна:

Отметим, что множества и могут быть пустыми. Например, если множество F есть точка в пространстве , то не существует ни одного куба, содержащегося в F. Случай же пустого возможен, когда F = ∅.

Кроме того, так как , то .

Очевидно, что при увеличении k множества возрастают, а убывают, т. е. справедливы включения

Тем самым, мы имеем две неотрицательные монотонные числовые последовательности мер множеств и , одна из которых {} — возрастающая, другая {} — убывающая, такие, что

Из этого следует, что последовательность {} ограничена сверху, а {} -снизу. Поэтому для любого ограниченного множества F существуют конечные пределы

**Определение.** Числа и и называются внутренней и внешней мерами множества F соответственно.

**Определение.** Если = , то говорят, что множество F измеримо по Жордану. Общее значение его внешней и внутренней мер называется n-мерной мерой Жордана и обозначается µF, т.е.

В дальнейшем для краткости будем, как правило, выражение «по Жордану» опускать. Например, вместо «измеримое по Жордану множество» будем говорить «измеримое множество» и т.п.

**Свойства.**

1. Мера элементарного множества совпадает с введенной ранее мерой.

2. Если , то множество F измеримо и µF = 0.

3. Мера µΠ произвольного бруса

равна произведению длин его сторон, т.е.

4. Мера µA любого измеримого множества A ⊂ неотрицательна, т.е. µA ≥ 0.

Оказывается, что не всякое ограниченное множество является измеримым. Действительно, в пространстве рассмотрим множество рациональных точек на отрезке [0, 1]. Для любого натурального k ни один куб порядка k не содержится в . Следовательно, внутренняя мера µ∗ равна нулю. С другой стороны, т.к. плотно в [0, 1], то внешняя мера µ ∗ равна 1.

**Теорема.** Множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда мера его границы равна нулю.

**Доказательство.** Докажем для двумерного случая. Обозначим Г границу множества F(Г=). Чтобы получить совокупность квадратиков сетки, покрывающих Г, или, как мы будем говорить, чтобы получить фигуру, покрывающую Г(смотреть предыдущий красно-оранжевый рисунок), надо из фигуры вычесть , т.е.

Очевидно, что мера равна

Т.е.

**Теорема.** Пусть множества A и B измеримы. Тогда множества A ∪ B, A ∩ B, A\B измеримы.

**Теорема.** Пусть множества A и B измеримы. Тогда имеет место неравенство

µ(A ∪ B) ≤ µA + µB (полуаддитивность меры).

**Следствие.** Пусть множества – измеримы, i = 1, . . . k. Тогда имеет место неравенство

**Теорема.** Пусть множества A и B измеримы и не имеют общих внутренних точек. Тогда имеет место равенство µ(A ∪ B) = µA + µB (аддитивность меры).

**Теорема.** Пусть множества A и B измеримы и A ⊂ B. Тогда имеет место неравенство

µA ≤ µB (монотонность меры).

# Лекция 9

**Двойной интеграл**

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Вместо функции одной переменной y =f(x), определенной на отрезке [a, b] здесь мы будем рассматривать функцию двух переменных z = f(x,y), определенную на некоторой ограниченной области D декартовой плоскости OXY. На область D будем накладывать ряд требований.

Прежде всего, потребуем, чтобы область D обладала конечной площадью. Например, площадь определена для такой области D, граница Γ(D) которой составлена из конечного числа графиков непрерывных функций или . Далее такие кривые, для удобства, будем называть «**хорошими**».

Площадь области D будем обозначить через . Замыканием области назовем объединение области и её границы:

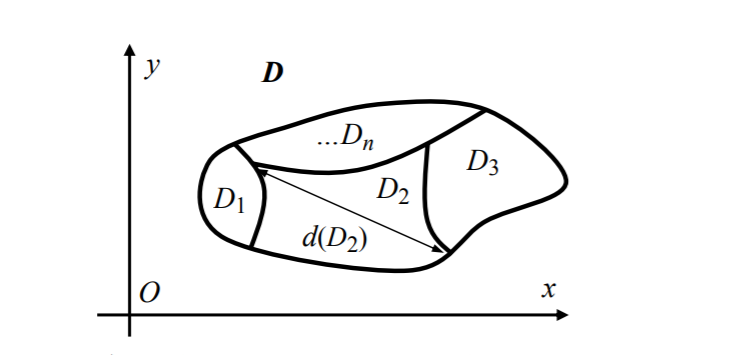
Будем считать, что для всех точек определена и непрерывна функция .

Рассмотрим разбиение Т области D на подобласти удовлетворяющие свойствам:

1) объединение подобластей полностью покрывает область D;

2) подобласти могут пересекаться только по своим граничным точкам;

3) границы Γ( ) подобластей Di представляют собой «хорошие» кривые, т. е. определены их площади ││.



Определим диаметр множества как наибольшее из расстояний ρ (M, N) между точками M и N множества .

Отметим, что в некоторых случаях это наибольшее расстояние может не существовать. Приведем подобный пример. Пусть расстояния между точками некоторой области принимают значения: Очевидно, что последовательность расстояний стремится к числу 2, оставаясь меньше этого числа, т.е. При этом самого значения “2“ среди расстояний нет. Поэтому нельзя написать: В подобных случаях записывают:

Диаметр множества определим следующим образом:

Диаметром всего разбиения T назовем наибольшее из чисел (Это число можно назвать мелкостью разбиения):

Продолжим теперь процедуру определения двойного интеграла. Выберем в каждой части произвольным образом точку с координатами (,), и составим сумму:

которую назовем **интегральной суммой** для функции f (x,y) в области D.

**Определение.** Если существует предел интегральных сумм при стремлении к нулю диаметра разбиений (т.е. мы разбили D максимально **мелко**), причем он не зависит ни от выбора разбиений T, ни от выбора точек областях , то такой предел называется **двойным интегралом от функции f (x,y) по области D:**

**Замечание.** Существует еще одно общепринятое и, в ряде случаев, более удобное обозначение двойного интеграла:

**Теорема.** Если область D ограничена «хорошими» кривыми и функция f(x,y) определена и непрерывна на замыкании области , то двойной интеграл

существует.

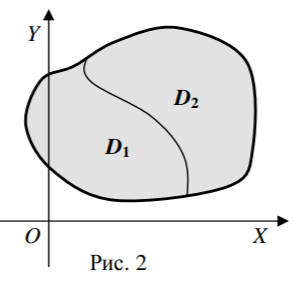
**Доказательство.** Очевидно

**Свойства двойного интеграла.**

1. **Линейность.**

(Имеется в виду, что если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл и в левой части).

1. **Аддитивность.** Если область D есть объединение областей D1 и D2, пересекающихся только по своей общей границе (смотреть рисунок), то



(Аналогично, если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл и в левой части).

1. **Интеграл от константы:** Двойной интеграл от константы по области D равен произведению этой константы на площадь области D:
2. **Переход к неравенству:** если для всех точек верно неравенство , то

**Следствие 1.**

**Следствие 2.** Если для всех точек , то

1. **Теорема об оценке.** Если числа и таковы, что для всех точек верны неравенства , то

**Доказательство.** Очевидно

1. Если D – ограниченная область с «хорошей» границей, то

**Доказательство.**

Действительно, для этого двойного интеграла

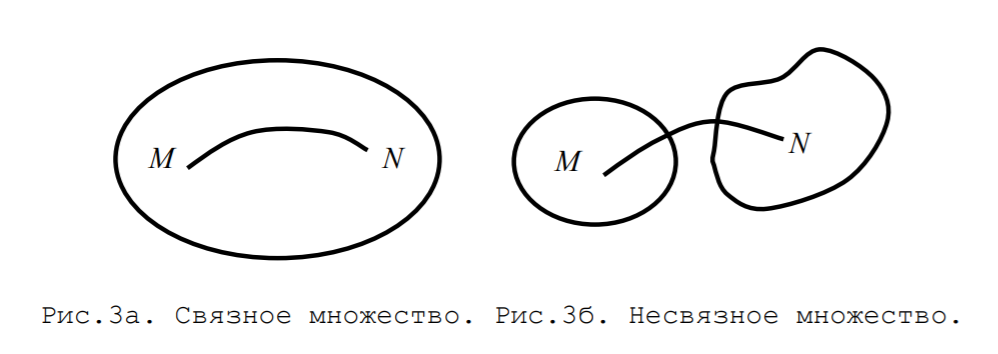
Тогда

Ну, это еще можно доказать, уверенно сказав:” Очевидно”

1. **Теорема о среднем**

Формулировка этого свойства для двойных интегралов потребует предварительного введения нового понятия.

**Определение.** Назовем **связным множеством** (на плоскости или в пространстве) такое множество, у которого любые две точки можно соединить непрерывной кривой, полностью лежащей внутри этого множества. Пример связного множества представлен на рисунке 3а, пример несвязного – на рисунке 3б.



Теперь может быть сформулирована.

**Теорема о среднем.** Пусть D – связная ограниченная область с «хорошей» границей и пусть функция ƒ(x,y) непрерывна на замыкании области . Тогда существует точка ∈ D, для которой выполняется равенство

**Доказательство.** Любая непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве достигает своего наибольшего и своего наименьшего значений. Следовательно, существуют точки такие, что

Исходя из связности D, мы знаем, что существует непрерывная кривая, соединяющая точки А и B. Запишем эту кривую в параметрической форме:

Функция F(t) = f (x(t), y(t)) непрерывна как суперпозиция (сложная функция) непрерывных функций и принимает на концах отрезка значения m и M.

По свойству непрерывной функции для любого числа С, лежащего между m и M,

( существует такая точка ∈ , что F() = C.

Теперь осталось вспомнить следствие 2 свойства 4:

Или

Возьмём в качестве числа C величину

Тогда существует такое значение , что

Следовательно

Ч.Т.Д

Число называют **средним значением** функции f (x,y) на области D.

А потом случился карантин ☹